Tomasz Downarowicz
Instytut Matematyki i Informatyki
Politechnika Wrocławska
50-370 Wrocław

Wrocław, 9 grudnia 2008

Analiza Funkcjonalna SPPI IIr.

WYKŁAD 6: Operatory i funkcjonały

Niech V i W będą przestrzeniami unormowanymi (nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$).

Definicja. *Operatorem (liniowym ograniczonym)* z V do W nazywamy funkcję $F : V \to W$ spełniającą
1) $F(x + y) = F(x) + F(y)$,
2) $F(\alpha x) = \alpha F(x)$,
3) $\sup\{\|F(x)\| : \|x\| \le 1\} < \infty$.

Pierwsze dwa warunki to liniowość, trzeci nazywa się *oganiczoność* (choć formalnie F nie jest funkcją ograniczoną na V).
Liczbę w warunku 3) oznaczamy przez $\|F\|$ i nazywamy normą operatora.

Twierdzenie 1. Zbiór $L(V, W)$ wszystkich operatorów z V do W z naturalnymi działaniami i wyżej określoną normą jest przestrzenią liniową unormowaną. Jeśli W jest Banacha, to $L(V, W)$ też.

Dowód jest elementarny.

Twierdzenie 2. Każdy operator (liniowy i ograniczony) jest ciągły. Każda funkcja $F : V \to W$ liniowa i ciągła jest operatorem (tzn. jest ograniczona).

Dowód. Oczywiście, z liniowości, $F(0) = 0$ (powinno się napisać $F(0_V) = 0_W$). Wystarczy pokazywać ciągłość w zerze, bo jeśli $x_n \to x$ to $F(x_n)-F(x) = F(x_n-x)$, a to dąży do zera jeśli jest ciągłość w zerze. Niech zatem $0 \ne x_n \to 0$ w V. Wtedy $0 \ne \|x_n\| \to 0$. Zatem $\|F(x_n)\| = \left\|\|x\|F(\frac{x}{\|x\|})\right\| = \|x\| \left\|F(\frac{x}{\|x\|})\right\| \le \|x\|\|F\| \to 0$.
Czyli $F(x_n) \to 0$.
Teraz załóżmy, że funkcja liniowa F nie jest ograniczona (na kuli jednostkowej). Wtedy istnieje ciąg $y_n \ne 0$ taki, że $\|y_n\| \le 1$ oraz $\|F(y_n)\| \to \infty$. Wtedy wektory $x_n = \frac{y_n}{\|F(y_n)\|}$ spełniają $x_n \to 0$ oraz $\|F(x_n)\| = 1 \not\to 0$. Czyli nie ma ciągłości (w zerze). $\square$
Uwaga: W drugiej części dowodu korzystaliśmy tylko z jednorodności funkcji F.

Definicja. *Obrazem* i *jądrem* operatora $F : V \to W$ nazywamy odpowiednio $F(V) = \{F(x) : x \in V\}$ i $Ker(F) = \{x \in V : F(x) = 0\}$ (czyli $F^{-1}(\{0\})$). Oba zbiory są podprzestrzeniami liniowymi (pierwsza w W, druga w V). $Ker(F)$ jest zawsze domknięta.

Definicja. *Funkcjonałem* na przestrzeni unormowanej V nazywamy dowolny operator $F : V \to \mathbb{R}$ (lub $\mathbb{C}$, w zależności od tego nad jakim ciałem jest V).

Definicja. Zbiór wszystkich funcjonałów stanowi przestrzeń linową unormowaną (normą operatorową). Ponieważ $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ są zupełne, przestrzeń funkcjonałów jest przestrzenią Banacha (niezależnie od tego, czy V jest zupełna czy nie). Nazywamy ją *przestrzenią dualną do* V i oznaczmy V^*.

PRZYKŁADY
1. $V = \mathbb{R}^n$. Wtedy $V^* = \mathbb{R}^n$. Ogólniej: jeśli V jest ośrodkową przestrzenią Hilberta, to $V^* = V$. Mainowicie, każdy element y indukuje funkcjonał wzorem $F_y(x) = x \circ y$. Łatwo sprawdza się, że jest to funkcjonał i jego norma wynosi $\|y\|$. Trudniej pokazuje się na odwrót, że każdy funkcjonał jest tej postaci. Trzeba skorzystać z bazy ortogonalnej (na ćwiczenia).
2. $V = l^1$. Wtedy $V^* = l^\infty$ (na ćwiczenia).